И. А. ПРИХОДЬКО, В. Б. ВТОРОВ, Г. В. БЕЛЬСКИЙ, Е. А. ВАСИЛЬЕВ
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

Рассмотрение возникновения хаотических явлений и их динамики является перспективным направлением исследований предсказания технических неисправностей. В работе выполнен анализ системы Лоренца на основе разложения по методу «Гусеница»-SSA. Выделены тренд, периодические и непериодическибе составляющие. Получено необходимое число главных компонент необходимых для восстановления временного ряда на основе системы Лоренца.

Введение. Известны сложные динамические системы, в которых возможны явления хаоса. Хаотические процессы встречаются в радиотехнике, электронике и объектах электроэнергетики, например [1]. В случае автоматических систем подобные явления могут вызывать поломку или дисфункцию составных частей системы. Рассмотрение возникновения хаотических явлений и их динамики является перспективным направлением исследований предсказания технических неисправностей. Предлагаемый доклад посвящен результатам численного анализа хаотических движений модели Лоренца [2], оценке возможности восстановления непериодического временного ряда на основе метода сингулярного спектрального анализа «Гусеница»-SSA (singular spectrum analysis) [3], [4].

Исследование динамической системы Лоренца со странным аттрактором.

Уравнения системы Лоренца [2]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x-y), \\ \dot{y} &= -xz - y + rx, \\ \dot{z} &= -bz + xy. \end{aligned} \tag{1}$$

Обычно полагают: $\sigma=10$, $b = 8/3$.Тип аттрактора меняется при изменении параметра r, коэффициента Рэлея. Расчет выполнен для значения $r = 22$.

Задача восстановления и прогнозирования временных рядов в различных прикладных приложениях в последнее время успешно решается на основе метода «Гусеница»-SSA [5], [6]. Это метод анализа временных рядов, основанный на преобразовании одномерного ряда в многомерный с помощью однопараметрической сдвиговой процедуры, исследовании полученной многомерной траектории с помощью анализа главных компонент (сингулярного разложения) и восстановлении ряда по выбранным главным компонентам [3]. Результат применения метода – разложение временного ряда по базису, порожденному самой функцией, на простые компоненты: тренды, периодические составляющие и шум. Полученное разложение может использоваться как основа для прогнозирования ряда.

Для системы Лоренца (1) (рис. 1) с коэффициентом $r = 22$ характерно свойство переходного хаотического поведения. В зависимости от начальных условий в некоторый момент времени хаотические осцилляции обрываются и переходят в режим затухающих осцилляций.

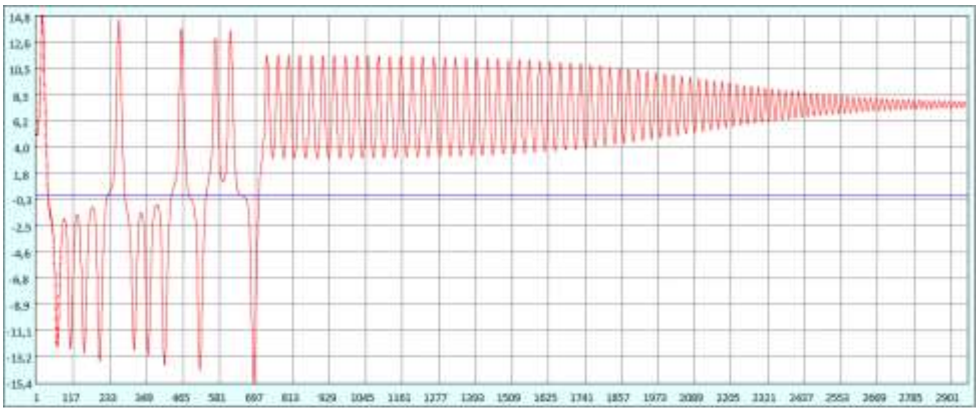


Рис. 1. Временной ряд

Первым этапом сингулярного спектрального анализа является составление траекторной матрицы. Для этого необходимо выбрать д л и н у г у с е н и ц ы, которая будет соответствовать размерности матрицы. Для решения задачи анализа исходного временного ряда рекомендуется брать длину гусеницы равной половине длины ряда или такую, которую позволяют использовать компьютерные ресурсы [3]. Для исходного временного ряда длительностью t = 2950 с длина г у с е н и ц ы принята равной L = 900. Из анализа графика логарифма собственных чисел траекторной матрицы число главных компонент выбрано равным 150.

Затем необходимо выделить компоненты, относящиеся к тренду и периодической составляющей. Идентификация составляющих ряда на основе сингулярного разложения его траекторной матрицы проведена визуальным способом, на основе графического представления результатов (рис. 2, 3) и опираясь на имеющиеся теоретические сведения [3], [5].

Для выделения тренда необходимо сгруппировать собственные тройки с медленно меняющимися сингулярными векторами.1-й и 2-й векторы (рис. 2) меняются медленно, хотя в них присутствует аддитивная осциллирующая составляющая. Это объясняется неточной разделимостью ряда на тренд, периодическую составляющую и шум, когда составляющая ряда, которая задает медленно меняющуюся часть сингулярных векторов, смешивается с гармоникой [5].

Поскольку медленно меняющаяся составляющая определяет существенно больший вклад (73,285 % и 4,766 %), чем осциллирующая, 1-й и 2-й векторы относятся к трендовой группе.

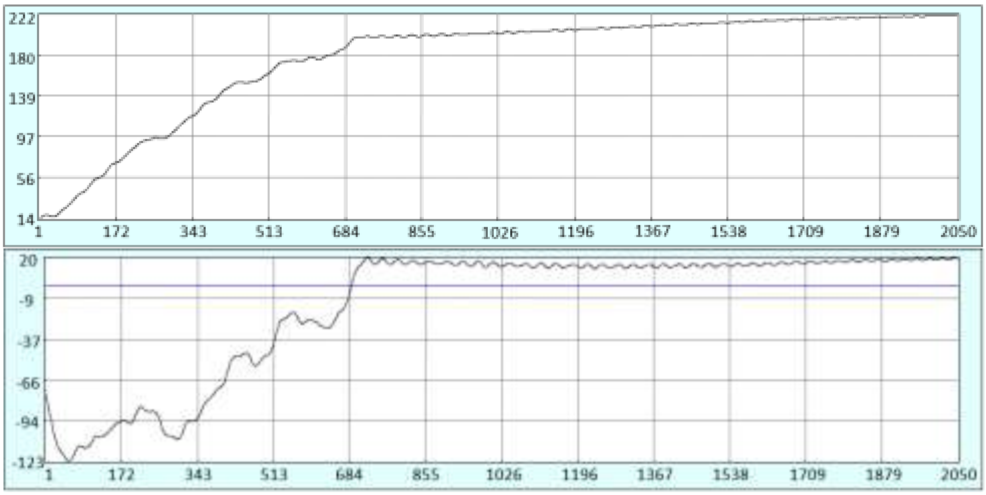
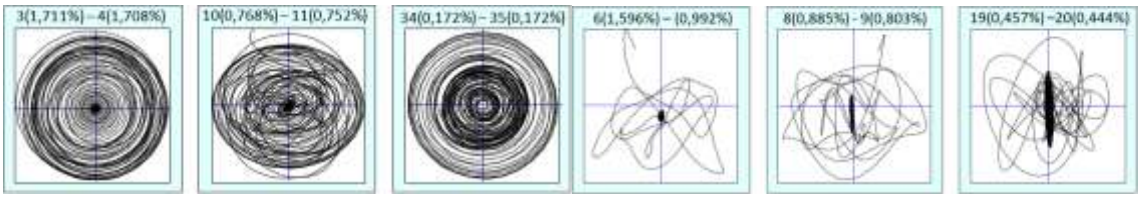


Рис. 2. Графики главных компонент

Для определения периодической составляющей используют двумерные диаграммы собственных векторов, на которых по одной оси откладываются элементы первого вектора из пары, а по другой – элементы второго вектора. В качестве примера, приведены двумерные диаграммы некоторых собственных векторов (рис. 3).



а) б)

Рис. 3. Двумерные диаграммы собственных векторов

Согласно рисунку пары собственных векторов (рис. 3*а*) 3–4, 10–11, 34–35, а также 13–14; 20–21; 22–23; 36–37; 38–39; 42–43; 49–50; 51–52; 58–59;61–62;63–64; 66–67; 68–69;70–71;72–73; 74–75; 83–84; 86–87; 107–108; 112–113; 115–116; 122–123; 125–126; 127–128;130–131; 134–135; 137–138;141–142;143–144; 148–149 образуют достаточно четкие спирали. Отсюда следует [3], что в ряде присутствуют гармоники, которым соответствуют эти векторы и которые могут быть отнесены к периодической составляющей.

Основные составляющие ряда – непериодические (рис. 3*б*).

Результаты восстановления временного ряда на основе аттрактора Лоренца (1), а также остатки восстановления представлены на рис. 4.

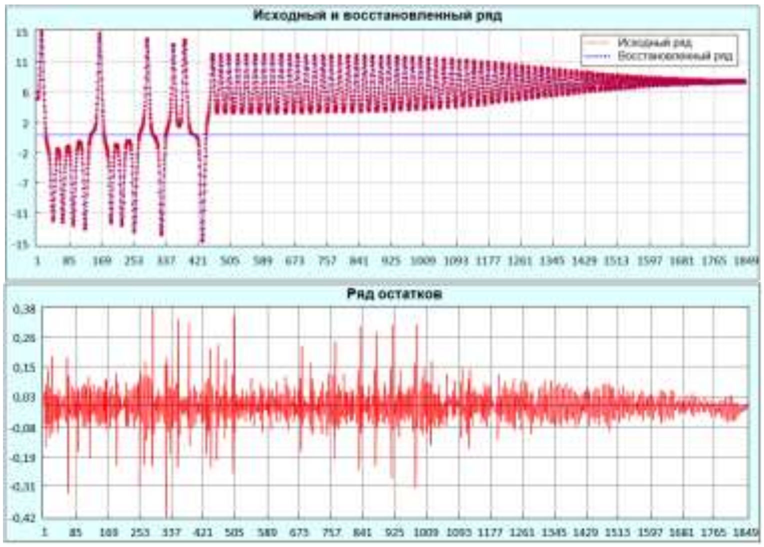


Рис. 4. Восстановление временного ряда

В работе выполнена оценка точности восстановления для различных значений длины гусеницы и числа главных компонент. Лучший результат получился в случае, если обе величины равны 980.

Заключение

Сравнение результатов анализа периодического временного ряда [6] и хаотической системы Лоренца на основе метода спектрального анализа показывает необходимость использования гораздо большего числа главных компонент во втором случае. В примере [6] применение восемнадцати – тридцати главных компонент гарантирует высокую точность прогноза, во втором случае для успешного решения задачи восстановления временного ряда на основе уравнений Лоренца минимальное необходимое число главных компонент – около 150 (рис. 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Демирчян К.С., Бутырин П.А., Савицки А**. Стохастические режимы в элементах и системах электроэнергетики // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1987. № 3. С. 3–16.
2. **Лоренц Э.Н**. Детерминированное непериодическое течение / В сб. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 88–116.
3. **Голяндина Н.Э**. Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов: Учебное пособие. СПб.: ВВМ, 2004. 76 с.
4. http://www.gistatgroup.com/gus/programs.html
5. **Александров Ф.И., Голяндина Н.Э**. Автоматизация выделения трендовых и периодических составляющих временного ряда в рамках метода «Гусеница»-SSA // Exponenta Pro. № 3–4 (7–8). 2004. С. 54–61.
6. Minor A.S., Polyakhov N.D., Prikhodko I.A., Vorobyova E.A. Forecasting of a temporary row on the basis of the caterpillar method - SSA(2015). // Proceedings of International Conference on Soft Computing and Measurements, SCM 2015, art. no. 7190439. P. 150–152.

I.A. Prikhodko, V.B. Vtorov, G.V. Belskiy, E.A. Vasilev, Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI", St. Petersburg

Investigation of the Lorenz Dynamic System

The examination of chaotic phenomena origination and their dynamics is a promising line of investigations into technical malfunction forecast. In the paper, the Lorenz system analysis is performed on a basis of the expansion by the "Caterpillar"-SSA method. The trend, periodic and non-syclic components are selected. A necessary number of principal components for time series reconstruction on a basis of Lorenz system has been obtained.