Э. И. ЦВЕТКОВ, Е. С. СУЛОЕВА
СПбГЭТУ «ЛЭТИ», Санкт-Петербург

МЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рассматривается задача метрической идентификации зависимости, которая имеет целью обеспечение возможности определения ее вида на примере плотности распределения случайной величины с использованием вероятностных характеристик.

Метрическая идентификация зависимостей [1] – сравнительно новое направление в метрологии. Цель метрической идентификации – установление вида зависимости, позволяющего определять ее значение при фиксированном значении аргумента. При этом в соответствии с принципами метрологии [2] для получаемых результатов определяются точностные характеристики. Метрическая идентификация зависимостей занимает промежуточное положение между измерениями величин и идентификацией объектов и отношений и в ее основе случайная величина λ, свойства которой представляются числовыми и функциональными вероятностными характеристиками, определяемыми на множестве ее возможных значений Λ, т.е. случайная величина $\lambda \in \Lambda$.

Числовая вероятностная характеристика $\Phi[\lambda]$ определяется соотношением

$$\Phi[\lambda] = \lim_{i \to \infty} \sum_{i=1}^{I} g_{\Phi}[\lambda_i]/I, \tag{1}$$

где λ_i – *i*-ый отсчет λ; $g_{\Phi}[\lambda_i]$ – преобразование, лежащее в основе определения $\Phi[\lambda]$.

Функциональная вероятностная характеристика $\Phi[\alpha/\lambda]$ определяется соотношением

$$\Phi[\alpha/\lambda] = \lim_{i \to \infty} \sum_{i=1}^{I} g_{\Phi}[\alpha/\lambda_i]/I. \tag{2}$$

Соответственно оценки числовой $\Phi[\lambda]$ и функциональной вероятностной характеристики $\Phi[\alpha/\lambda]$, получаемые в *j*-ом идентификационном эксперименте представляются выражениями

$$\Phi_j^*[\lambda] = \sum_{i=1}^{I} g_{\Phi}[\lambda_{ij}^*]/I, \tag{3}$$

$$\Phi_j^*[\alpha/\lambda] = \sum_{i=1}^{I} g_{\Phi}[\alpha/\lambda_{ij}^*]/I. \tag{4}$$

Метрическая идентификация зависимости имеет целью обеспечение возможности определения ее вида, позволяющего установить значении функции при фиксированном значении аргумента. При метрической идентификации вероятностной характеристики – установление значения $\Phi[\alpha/\lambda]$ при фиксированном значении *α*.

Особенность метрической идентификации вероятностных характеристик случайных функций в том, что их определение предполагает выполнение усреднения по совокупности отсчетов. Оценка достоверности [3] получаемых при метрологическом анализе вероятностных характеристик точности идентификации функциональной вероятностной характеристики требует дополнительного усреднения. Указанным особенностям метрологического анализа процедур оценивания вероятностных характеристик до настоящего времени уделяется мало внимания, а практическая потребность в использовании соответствующей информации возрастает. Ниже рассматриваются особенности метрической идентификации распределения плотности вероятности случайных функций.

Идентификация $w_j(\lambda)$ в общем случае предполагает формирование $\{\lambda_{ij}^*\}_{i=1}^{I}$ с последующим определением частости (оценки вероятности) попадания отсчетов в установленные интервалы области определения Λ случайной величины. Соответствующее уравнение имеет вид:

$$\{\lambda_{ij}^*\}_{i=1}^I \to w_j^*(\lambda) = \{\{n_s \Delta_s^{-1} I_s^{-1} / (\lambda_{ij}^* \in \lambda_{s-1}, \lambda_s)\}_{i=1}^I\}_{s=1}^S. \quad (5)$$

Здесь введены следующие обозначения: I – число используемых отсчетов в j-ом идентификационном эксперименте; S – число интервалов; $\Delta_s = \lambda_s - \lambda_{s-1}$ – протяженность i-го интервала; I_s – число отсчетов, для которых справедливо $\lambda_{ij}^* \in (\lambda_{s-1}, \lambda_s)$; n_s – число отсчетов, попавших в s-ый интервал.

Полученные результаты позволяют определить погрешность идентификации:

$$\Delta w_j^*(\lambda) = w_j^*(\lambda) - w(\lambda) \quad (6)$$

и исследовать ее зависимость от параметров I, S, $\{\Delta_s\}_{s=1}^S$.

При использовании в качестве критерия точности дисперсии

$$D[\Delta w_j^*(\lambda)] = N^{-1} \sum_{j=1}^N N_s^{-1} \sum_{s=1}^S (w_{js}^*(\lambda_j^*) - w_s(\lambda))^2, \quad (7)$$

где N – число оценок, используемых при определении $D[\Delta w_j^*(\lambda)] \cdot N_s = N \cdot \int_{\lambda_{s-1}}^{\lambda_s} w(\lambda) d\lambda$.

При планировании метрической идентификации распределения плотности вероятности случайной величины $w(\lambda)$ устанавливаются параметры I, S, N. В общем случае их оптимальные значения соответствуют решению системы уравнений:

$$\begin{cases} d(D[\Delta w_j^*(\lambda)]) / dI = 0 \\ d(D[\Delta w_j^*(\lambda)]) / dS = 0 \\ d(D[\Delta w_j^*(\lambda)]) / dN = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Приведенные соотношения позволяют также проводить метрологический анализ и планирование идентификационного эксперимента с помощью имитационного моделирования (машинного эксперимента).

В качестве примера указывается возможность идентификации распределения по закону Симпсона, для которого объем выборки составил 100 отчетов.

Интервал области существования значений [-2;2] делится на S=10, т.е. Δ_s = 0,4, ниже указаны: графическое отображение данных полученных при имитационном моделировании («эксперимент»), теоретическая часть, полученная через аппроксимацию значений («теория»), а также ошибка определения плотности распределения вероятности («ошибка (разность)»).

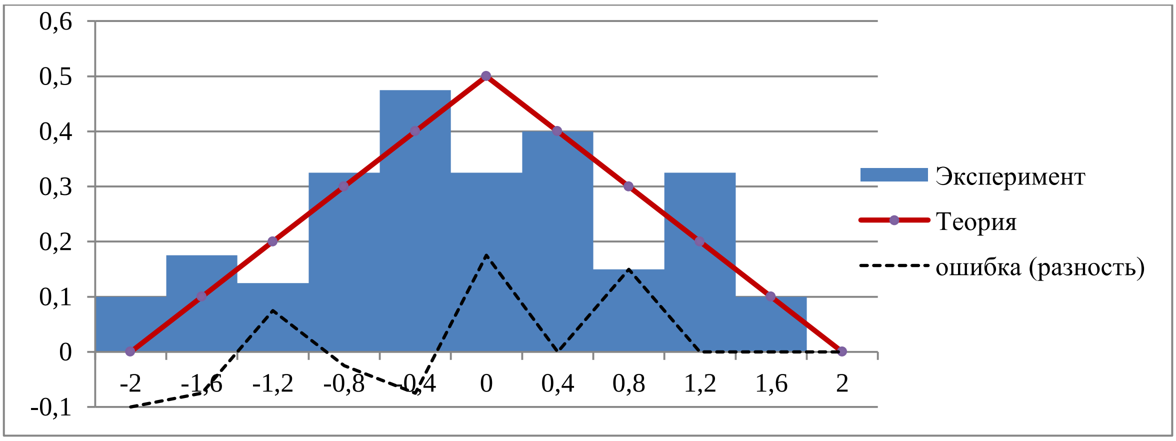

Рисунок. Сравнение экспериментальной и теоретической плотности распределения вероятности с указанием ошибки (разности между этими значениями)

В среднем ошибка определения составила 0.011, что объясняется конечностью используемых интервалов гистограммы, т.к. при их увеличении – это величина ошибки определения будет снижаться. Появление погрешности также объясняется принятым способом округления и используемым видом аппроксимации. Достоверность результатов определяется неадекватностью используемых математических моделей; конечностью объема используемой при формировании оценки, а также неидеальностью выполняемых преобразований, проявляющимися с учетом особенностей процедур идентификации.

Применение подобного рода метрической идентификации целесообразно в отсутствии априорных знаний о плотности распределения вероятности, которые необходимы для проведения метрологического анализа результатов измерений и имеют специфику, заключающуюся в необходимости учитывать погрешности результатов совместных измерений аргумента и функции, а также погрешности аппроксимации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Цветков Э.И.** Метрология. Модели. Метрологический анализ. Метрологический синтез. Дополнительные главы. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ.
2. Метрология, стандартизация, сертификация: учебник для высших учебных заведений /[Б.Я. Авдеев, В.В. Алексеев, Антонюк и др.]; под ред. В.В. Алексеева. М.: «Академия», 2007.
3. Tsvetkov E.I., Suloeva E.S. Analysis of the parameters that determine the reliability of the results of a verification of measuring instruments // MEASUREMENT TECHNIQUES Vol. 61 No: 9. 2018. P. 872-877.

E.I. Tsvetkov, E.S. Suloeva
Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI", Saint Petersburg

Metric Identification of the Density Distribution of a Random Value

The problem of metric identification of a dependence is considered, which aims to provide the possibility of determining its type by the example of the distribution density of a random variable using probabilistic characteristics.