

А. Ф. ЗАДОРЖНЫЙ  
НГАСУ (Сибстрин), Новосибирск

В. А. МЕЛЕНТЬЕВ  
ИФП СО РАН, Новосибирск

## О СОВМЕСТИМОСТИ ТОПОЛОГИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ И СИСТЕМ

*Исследуются аспекты совместимости топологий параллельных вычислительных систем и задач, предложено и обосновано введение соответствующих показателей, базирующихся на оригинальной топологической модели параллельных вычислений и на нетрадиционном описании графа его проекциями. На примере гиперкубической вычислительной системы (ВС) и задач с кольцевой и звездной информационными топологиями продемонстрировано определение показателей и их использование в сопоставительном анализе применимости интерконнекта с заданной топологией для решения задач с произвольной информационной структурой.*

**Введение.** Основанная на законе Амдала (Amdahl's Law) [1] модель позволяет оценить предельные ускорения решения задач, обладающих скалярностью (нераспараллеливаемостью) отдельных фрагментов. Однако, абстрагированность такой модели от информационной топологии задачи и от топологии интерконнекта системы препятствует получению цельной картины обусловленности параллелизма задачи от топологий системы и, следовательно, формализованной оптимизации архитектуры последней под классы решаемых задач. Предлагаемый доклад посвящен исследованию совместимости топологий параллельных систем и задач, введены соответствующие показатели, базирующиеся на оригинальной топологической модели параллельных вычислений [2–8] и на нетрадиционном описании графа проекциями [9–13].

**1. Основные положения и понятие о совместимости топологий.** Реальновременная реализация того или иного параллельного приложения на ВС может быть успешной, если: 1) быстродействие ее интерконнекта достаточно для того, чтобы задержки, вносимые обменными процессами между параллельными ветвями, не превышали задержек, допускаемых требованиями реального времени и 2) граф системы, дополненный ребрами, соответствующими предшествующему условию, содержит подграф, изоморфный информационному графу задачи с числом вершин (параллельных ветвей), соответствующим этому же условию.

Исследования системных и сетевых топологий основаны на графовом их представлении, когда между модулями системы и вершинами, а также между линиями связи и ребрами графа установлены биективные соответствия. Основной недостаток традиционно используемых матрично-списковых описаний заключается в том, что задаваемые такими описаниями отношения смежности/инцидентности вершин/ребер графов бинарны, тогда как обычно используемые для оценки качества структур маршруты и циклы представляют собой многоместные отношения на множестве вершин

В связи с этим, в используемой здесь топологической модели авторы допускают несмежные (опосредованные) соединения информационно смежных процессоров. Это позволяет увеличить степень графа системы и повысить возможности изоморфных вложений в него графов решаемых задач, причем соотношение между объемами вычислений  $W$  и информационных взаимодействий  $Q$  в параллельной  $(W, Q)$ -задаче и быстродействие используемой сетевой технологии определяют взаимозависимость порядка графа задачи и предельно допускаемого в графе системы расстояния между информационно смежными вершинами – достижимости  $\delta$ . Под топологической совместимостью задачи с числом параллельных ветвей  $p$  и ВС с числом процессоров  $n > p$  мы понимаем возможность изоморфного вложения информационного графа задачи порядка  $p$  в трансформированный в соответствии с заданным значением достижимости  $\delta$  граф системы таким образом, что вершины в нем смежны, если расстояние между ними в исходном графе ВС порядка  $n$  не превышает  $\delta$ .

**2. Исследование совместимости на графовых моделях.** Существенные свойства рассматриваемых здесь в качестве примера топологий задач – кольцевой ( $W_R$ ) и звездной ( $W_Z$ ), не требуют дополняющих их названия пояснений. Выбор задач с такими информационными топологиями, как и выбор в качестве топологии ВС гиперкуба, обусловлен, прежде всего, простотой и

наглядностью демонстрации предлагаемого в данной работе способа оценки совместимости топологически разнотипных параллельных задач и систем.

Любой гиперкуб  $H_s$  имеет гамильтонов цикл, проходящий через каждую вершину ровно один раз [14], и хотя он (гиперкуб) является бипанциклическим графом (содержит циклы только четной длины при  $n > 3$ ) [15], проблем с организацией цикла на единицу меньшего или большего полученного из модели [7] нечетного значения  $p$ , не должно возникать. Поэтому, независимо от размерности  $s$  гиперкубической ВС, вложение в нее задачи с кольцевой топологией может быть абсолютным даже при  $\hat{\delta} = 1$ . Это означает, что использование гиперкубических ВС не вносит никаких ограничений в распараллеливание задач с кольцевой топологией, и если таковые все же имеют место, то они обусловлены только недостаточным быстродействием используемой в ВС сетевой технологии.

В [16] получена обобщенная на любые размерности  $s$  и достижимости  $\delta \leq s$  гиперкуба  $(H_s)_\delta$  формула потенциала параллелизма  $p_Z(H_s)_\delta$ :

$$p_Z(H_s)_\delta = \sum_{i=0}^{\delta} \binom{s}{i}.$$

Используя эту формулу, построим таблицу  $\delta$ -совместимости ( $0 < \delta < 4$ ) «звездной» задачи с  $s$ -мерной ( $1 < s < 9$ ) гиперкубической ВС:

Таблица

$s$	2	3	4	5	6	7	8
$n = 2^s$	4	8	16	32	64	128	256
$p_Z(H_s)_1,$ $C_Z(H_s)_1$	3, 0,75	4, 0,5	5, 0,3125	6, 0,1875	7, 0,1094	8, 0,0625	9, 0,0352
$p_Z(H_s)_2,$ $C_Z(H_s)_2$	4, 1	7, 0,875	11, 0,6875	16, 0,5	22, 0,3438	29, 0,2266	37, 0,1445
$p_Z(H_s)_3,$ $C_Z(H_s)_3$	4, 1	8, 1	15, 0,9375	26, 0,8125	42, 0,6563	64, 0,5	93, 0,3633

Здесь  $p_Z(H_s)_\delta$  – показатель абсолютного параллелизма, а  $C_Z(H_s)_\delta = p_Z(H_s)_\delta / n(H_s)$  – показатель относительного параллелизма звездной ( $W_Z$ ) задачи на ВС, топология которой описывается гиперкубом  $H_s$ , а сетевая технология интерконнекта позволяет использовать для рассматриваемой  $W_Z$ -задачи несмежные соединения информационно-смежных процессоров, длина которых не превышает достижимости  $\delta$ .

Из приведенной выше таблицы нетрудно убедиться в том, что:

1. Увеличение быстродействие интерконнекта (и соответствующее этому увеличение предельной длины  $\delta$  допускаемых соединений) приводит к существенному увеличению потенциала параллелизма и совместимости любых топологий ВС и решаемых на ней параллельных задач.

2. При увеличении размерности гиперкуба совместимость его с задачами со звездной топологией существенно падает, что вызвано весьма незначительным (в сравнении с увеличением числа  $n$  процессоров) повышением потенциала параллелизма.

Итак, на примере гиперкубической ВС и задач с кольцевой и звездной информационными топологиями в работе продемонстрировано определение показателей совместимости, исследованы топологические аспекты совместимости таких ВС и задач и продемонстрировано использование показателей совместимости в анализе применимости интерконнекта произвольной топологии для решения задач с заданной информационной топологией.

**Заключение.** Предложен показатель топологической совместимости вычислительных систем и решаемых на них параллельных задач. Показатель абстрагирован от технических характеристик используемого в ВС интерконнекта и позволяет оценить потенциальные возможности распараллеливания той или иной задачи, обусловленные только топологически.

Результаты данной работы будут полезны как разработчикам в сопоставлении параллельных систем и оптимизированного выбора их топологий, соответствующего заданному набору решаемых задач, так и исследователям в анализе потенциальных возможностей конкретных систем при решении на них параллельных задач с той или иной топологией.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Amdahl G.M.** Validity of the single processor approach to achieving large scale computing capabilities // Proceedings of the April 18-20, 1967, spring joint computer conference. 1967. С. 483-485.
2. **Melent'ev V.A.** Author's approach to the topological modeling of parallel computing systems //arXiv preprint arXiv:2003.10092. 2020.
3. **Melent'ev V.A.** About topological modeling of parallel systems and tasks // Materials of theInternationalConference «Scientific research of the SCO countries: synergy and integration», October 14, 2019. Part 2 (pp. 184-192).
4. **Мелентьев В.А.** Предельное распараллеливание в вычислительной системе с гиперкубической топологией при лимитировании длины межпроцессных соединений // Труды X Междунар. Конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO '15, Москва 26-29 января 2015 г. С. 1182-1193.
5. **Мелентьев В.А.** Вложение подсистем, лимитирующих длину и число путей между вершинами графа вычислительной системы // УБС. 2014. № 47. С. 212-246.
6. **Мелентьев В.А.** Предельное конфигурирование подсистем в гиперкубических вычислительных системах //Информационные технологии и вычислительные системы. 2015. №. 2. С. 20-30.
7. **Мелентьев В.А.** О топологической масштабируемости вычислительных систем // УБС. 2015. №58. С 115–143.
8. **Мелентьев В.А.** О топологической отказоустойчивости масштабируемых вычислительных систем // УБС. 2017. №70. С. 58-86.
9. **Мелентьев В.А.** Скобочная форма описания графов и ее использование в структурных исследованиях живучих вычислительных систем // Автотметрия. 2000. Т. 38. № 4. С. 36–52.
10. **Melent'ev V.A.** The bracket Pattern of a Graph // The 6th Intern. Conf. on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies, PRIA-6-2002. 2002. С. 57-61.
11. **Мелентьев В.А.** Формальные основы скобочных образов в теории графов //Труды 2-й Междунар. конф. Параллельные вычисления и задачи управления РАСО – 2004. С. 694-706.
12. **Мелентьев В.А.** Проектное описание графа вычислительной системы и его минимизация // Материалы XIII Междунар. научно-техн. конф. "ИТ-технологии: развитие и приложения". 2012. С. 14-15.
13. **Мелентьев В.А.** Операции над проекциями графов и актуализация описаний отказоустойчивых систем //Вестник ТГУ. Приложение. 2006. №. 17. С. 208-213.
14. **Mills W.H.** Some complete cycles on the n-cube //Proceedings of the American Mathematical Society. 1963. Т. 14. №. 4. С. 640-643.
15. **Schmeichel E., Mitchem J.** Bipartite graphs with cycles of all even lengths //Journal of Graph Theory. 1982. Т. 6. №. 4. С. 429-439.
16. **Melent'ev V.A., Shubin V.I., Zadorozhny A.F.** Topological scalability of hypercubic parallel systems and tasks // ISJ Theoretical & Applied Science. 2015. Т. 11. №. 31. С. 122-129.

A. F. Zadorozhny (NGASU (Sibstrin), Novosibirsk), V. A. Melentyev (IPP SB RAS, Novosibirsk)  
**About Compatibility of Topologies of Parallel Problems and Systems**

Aspects of compatibility of topologies of parallel computing systems and tasks are investigated, the introduction of the corresponding indicators based on the original topological model of parallel computing and on the non-traditional description of the graph by its projections is proposed and justified. Determination of indicators and their use in a comparative analysis of the applicability of an interconnect with a given topology for solving problems with an arbitrary information structure is demonstrated using the example of a hypercubic computing system (CS) and problems with ring and stellar information topologies.