

А. О. ВЕДЯКОВА

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

А. А. ВЕДЯКОВ, А. А. ПЫРКИН, А. А. БОБЦОВ, В. С. ГРОМОВ

Университет ИТМО, Санкт-Петербург

## ОЦЕНИВАНИЕ ЧАСТОТ МУЛЬТИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ

*В работе представлен метод построения оценок частот мультигармонического сигнала за конечное время. К измеряемому сигналу применяются операторы запаздывания, и строится линейная регрессионная модель, содержащая измеряемые сигналы и постоянный вектор, зависящий от неизвестных частот. Для векторной модели регрессии используется метод динамического расширения и смешивания регрессора (ДРСР), позволяющий синтезировать независимые регрессионные модели первого порядка. Затем, независимо друг от друга, строятся оценки неизвестных параметров регрессионных моделей методом стандартного градиентного спуска. На основе полученных оценок алгебраически вычисляется оценка параметров регрессионных моделей за конечное время, из которых восстанавливаются значения частот измеряемого сигнала.*

**Введение.** Одной из фундаментальных проблем теории управления является задача оценивания частот в режиме онлайн для сигнала, состоящего из нескольких синусоид. Проблема изучается во многих отраслях науки: обработка сигналов, приборостроение, адаптивное управление. Задача оценивания частот широко представлена в практических приложениях, например, в системах точного позиционирования в нанотехнологиях [1], в системах динамического позиционирования для сосудов, подвергающихся внешним возмущениям, таким как волны, ветры и течения [2], в энергосистемах для обнаружения неисправностей [3], [4] и т. д.

На данный момент существуют различные методы для оценивания параметров мультигармонических сигналов в непрерывном времени. Одним из подходов является построение адаптивного наблюдателя минимальной размерности  $3n$ , обеспечивающего глобальную экспоненциальную сходимость [5], [6], [7], а так же гибридный наблюдатель [8] для синтеза оценок частот мультигармонического сигнала с насыщением. Альтернативными подходами, являются алгоритмы с использованием метода Динамического Расширения и Смешивания Регрессора (ДРСР) [9], [10], позволяющий одновременно улучшить помехоустойчивость и переходные характеристики, и метод, основанный на применении интегрального оператора Вольтера [11].

Предлагаемый доклад посвящен расширению предложенного ранее метода оценивания частоты синусоидального сигнала [12] на несмещенный сигнал, состоящий из  $n$  гармоник.

**Постановка задачи.** Рассмотрим измеряемый мультигармонический сигнал:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \delta_i) \quad (1)$$

где  $\omega_i \in \mathbb{R}_+$  – частоты сигнала,  $A_i \in \mathbb{R}_+$  – стационарные амплитуды,  $\delta_i \in \mathbb{R}$  – фазы,  $i = \overline{1, n}$ ,  $n$  – число гармоник сигнала  $y(t)$ . Параметры  $\omega_i$ ,  $A_i$  и  $\delta_i$  считаются неизвестными.

Требуется построить оценки  $\hat{\omega}_i(t)$  частот  $\omega_i$ , обеспечивающие сходимость ошибки оценивания  $\tilde{\omega}_i(t) = \omega_i - \hat{\omega}_i(t)$  к нулю за определенное конечное время  $t_{ft} > 0$ , т. е.  $\tilde{\omega}_i(t) \equiv 0$  при  $t \geq t_{ft}$ . Далее будем предполагать, что известна верхняя граница  $0 < \omega_i < \bar{\omega}$  для частот сигнала (1).

**Параметризация.** Построим линейную регрессионную модель порядка  $n$ , включающую измеряемые сигналы и вектор неизвестных параметров, зависящий от частот  $\omega_i$  сигнала  $y(t)$ . Для этого рассмотрим оператор запаздывания:

$$[Z(\cdot)](t) = \begin{cases} 0, & t < h, \\ (\cdot)(t - h), & t \geq h, \end{cases} \quad (2)$$

где  $h \in \mathbb{R}_+$  – величина запаздывания, удовлетворяющая условию  $h < \frac{\pi}{2\bar{\omega}}$ .

Применим оператор запаздывания (2) к измеряемому сигналу (1). Заметим, что сигналы с кратным  $h$  запаздыванием, в силу ассоциативного закона, могут быть записаны следующим образом

$$y(t - kh) = Z[Z[\dots [Zy(t)] \dots]] = Z^k y(t), \quad \forall k = \overline{1, 2n}. \quad (3)$$

Приведем утверждение без доказательства, гарантирующее что сигнал  $y(t)$ , состоящий из  $n$  синусоид может быть выражен через  $2n$  сигналов с запаздываниями:  $y(t - h), \dots, y(t - 2nh)$  при  $t \geq 2nh$ .

**Утверждение.** Соотношение

$$[Z^2 + 1 - 2Zc_1] \cdot \dots \cdot [Z^2 + 1 - 2Zc_n]y(t) = 0 \quad (4)$$

справедливо для любого  $n = 1, 2, \dots$  и  $t \geq 2nh$ , где  $c_i = \cos \omega_i h$  постоянные коэффициенты при  $i = \overline{1, n}$ ,  $Z$  – оператор запаздывания (2).

На основе выражения (4) получим регрессионную модель:

$$\Psi(t) = \varphi^T(t)\theta, \quad (5)$$

где  $\Psi \in \mathbb{R}^1$  – зависимая функция,  $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]^T \in \mathbb{R}^n$  – регрессор,  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T \in \mathbb{R}^n$  – вектор неизвестных параметров:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= [Z^2 + 1]^n y(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k Z^{2(n-k)} y(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k y(t - 2h(n-k)), \\ \varphi_i(t) &= 2^i Z^i [Z^2 + 1]^{n-i} y(t) = 2^i Z^i \sum_{k=0}^{n-i} C_{n-i}^k Z^{2(n-k)} y(t) = \\ &= 2^i \sum_{k=0}^{n-i} C_{n-i}^k y(t - 2h(n-k) - ih), \quad i = \overline{1, n}, \\ \theta_1 &= -c_1 - c_2 - \dots - c_n, \\ \theta_2 &= c_1 c_2 + c_1 c_3 + \dots + c_{n-1} c_n, \\ &\dots \\ \theta_n &= (-1)^n c_1 c_2 \cdot \dots \cdot c_n. \end{aligned} \quad (6)$$

где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

**Метод ДРСР.** Алгоритм оценивания за конечное время [12] применим для построения оценок параметров регрессионной модели первого порядка. Для линейной регрессии порядка  $n$  предлагается использовать метод ДРСР [9], позволяющий перейти к  $n$  независимым регрессионным моделям первого порядка. Следуя процедуре ДРСР, введем в рассмотрение оператор запаздывания  $[H(\cdot)](t)$  аналогичный (2) с величиной запаздывания  $d \in \mathbb{R}_+$ .

Применим оператор запаздывания  $[H(\cdot)](t)$  к линейной регрессионной модели (5):

$$H^i\{\Psi(t)\} = H^i\{\varphi(t)\}^T \theta, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

где  $H^i\{\cdot\} = \underbrace{H\{H\{\dots [H\{\cdot\}] \dots\}}_i$  и запишем расширенную матрицу из выражений (7):

$$\varepsilon \Psi_f(t) = \varepsilon \Phi_f(t)\theta, \quad (8)$$

где  $\Psi_f := [H^1\{\Psi\}, H^2\{\Psi\}, \dots, H^n\{\Psi\}]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Phi_f(t) = [H^1\{\varphi\}^T, H^2\{\varphi\}^T, \dots, H^n\{\varphi\}^T]^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  – масштабирующий коэффициент.

На этапе смешивания регрессора метода ДРСР домножим влево выражение (8) на союзную матрицу  $\text{adj}\{\Phi_f(t)\}$  и получим соотношение

$$\Psi(t) = \Delta(t)\theta, \quad (9)$$

где  $\Psi(t) := \text{adj}\{\varepsilon \Phi_f(t)\} \varepsilon \Psi_f(t) = [\Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots, \Psi_n(t)]^T$ ,  $\Delta(t) := \det\{\varepsilon \Phi_f(t)\}$ , где  $\det\{\cdot\}$  – определитель матрицы.

Запишем выражение (9) покомпонентно:

$$\Psi_i(t) = \Delta(t)\theta_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10)$$

где  $\Delta(t), \Psi(t) \in \mathbb{R}$ ,  $\theta_i$  – компоненты вектора неизвестных параметров  $\theta$  модели (5).

Заметим, что в результате применения метода ДРСР было получено  $n$  независимых регрессионных моделей (10) первого порядка, что позволяет синтезировать оценки параметров  $\theta_i$  независимо друг от друга.

**Построение оценок за конечное время.** Для оценивания параметров регрессионных моделей (10) воспользуемся методом стандартного градиентного спуска:

$$\hat{\theta}_i(t) = \gamma_i \Delta(t) (\Psi_i(t) - \Delta(t)\hat{\theta}_i(t)), \quad i = \overline{1, n}, \quad (11)$$

где  $\hat{\theta}_i \in \mathbb{R}$  – оценка параметра  $\theta_i$ ,  $\gamma_i \in \mathbb{R}_+$  – настраиваемые параметры  $i = \overline{1, n}$ .

Запишем уравнение относительно ошибки оценивания  $\tilde{\theta}_i(t) := \theta_i - \hat{\theta}_i(t)$ :

$$\dot{\tilde{\theta}}_i(t) = -\gamma_i \Delta^2(t) \tilde{\theta}_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Найдем решение (12) в явном виде:

$$\tilde{\theta}_i(t) = \tilde{\theta}_i(0) e^{-\gamma_i \int_0^t \Delta^2(r) dr}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Согласно работе [9] метод оценивания (11) гарантирует экспоненциальную сходимость ошибки оценивания  $\tilde{\theta}_i(t)$  к нулю, если функция  $\Delta(t)$  ограничена и удовлетворяет условию незатухающего возбуждения, т. е.  $\exists T, t_0, a \in \mathbb{R}_+ : \int_t^{t+T} \Delta^2(r) dr \geq a, \quad \forall t > t_0$ .

Используя выражение  $\tilde{\theta}_i(t) = \theta_i - \hat{\theta}_i(t)$  и обозначение  $W(t) := e^{-\gamma_i \int_0^t \Delta^2(r) dr}$ , запишем выражение (13) в виде

$$\begin{aligned} \theta_i - \hat{\theta}_i(t) &= \theta_i W(t) - \hat{\theta}_i(t) W(t), \quad i = \overline{1, n}, \\ \hat{\theta}_i^{ft}(t) &:= \frac{1}{1-W(t)} (\hat{\theta}_i(t) - \hat{\theta}_i(0) W(t)), \quad t \geq t_{ft}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\hat{\theta}_i^{ft}$  – оценка параметра  $\theta_i$  за конечное время.

На основе оценок  $\hat{\theta}_i^{ft}(t)$  построим  $\hat{c}_k^{ft}(t)$ , используя формулы Виета из соотношения (5), и получим оценки частот:

$$\hat{\omega}_i^{ft}(t) = \frac{1}{h} \arccos(\hat{c}_i^{ft}(t)), \quad i = \overline{1, n}, \quad (15)$$

где  $\hat{\omega}_i^{ft}$  – оценка частоты  $\omega_i$  такая, что  $\omega_i - \hat{\omega}_i^{ft}(t) \equiv 0$  для предопределенного  $t \geq t_{ft}$ .

**Численное моделирование.** Приведем результаты численного моделирования, иллюстрирующие эффективность предложенного алгоритма оценивания, выполненного с использованием MATLAB Simulink.

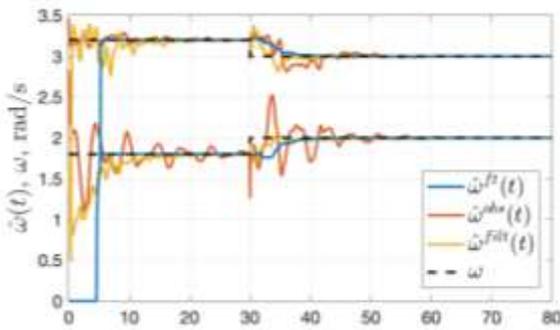


Рисунок. Оценки частот в случае скачкообразного изменения величин частот измеряемого сигнала в момент времени  $t = 30$  с.

Сравним три алгоритма оценивания частот мультigarмонического сигнала (1): предложенный алгоритм с оценкой  $\hat{\omega}^{ft}(t)$ ; подход [5], основанный на адаптивном наблюдателе с оценкой  $\hat{\omega}^{obs}(t)$ ; метод [7], использующий фильтрацию, с оценкой частоты  $\hat{\omega}^{filt}(t)$ .

Рассмотрим входной сигнал при  $n = 2$  со скачкообразным изменением частоты в момент времени  $t = 30$  с:

$$y(t) = \begin{cases} \sin 2t + \cos 3t, & t < 30 \text{ с}, \\ \sin 1,8t + \cos 3,2t, & t \geq 30 \text{ с}. \end{cases}$$

Для сравнения, алгоритмы [5], [7] настраивались так, чтобы обеспечить одинаковую скорость сходимости при отсутствии внешних возмущений. Параметры предложенного алгоритма оценивания принимались равными:  $h = 0,7$ ,  $d = 0,4$ ,  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ . Метод из [5] настраивался как  $\bar{g} = 4$ ,  $r = 1,2$ ,  $\mu = 10$ ,  $\Lambda = [1 \ 4]$ . Параметры алгоритма [7] принимались равными  $\lambda = 2$ ,  $\omega_0 = 0,5$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 5$ . Графики оценок представлены на рисунке. Как видно из рисунка, все алгоритмы успешно оценили частоты входного сигнала, однако предложенный подход позволяет получить точную оценку в заранее заданный момент времени, а при изменении частоты алгоритм оценивания совпадает с градиентным методом (11).

**Заключение.** Представлен метод построения оценок частот мультigarмонического сигнала, позволяющий получить оценки параметров в заранее заданный момент времени. Однако, при изменении значений частот входного сигнала, ошибка оценивания сходится к нулю экспоненциально и оценка частот не может быть получена за конечное время. Этому аспекту будут посвящены дальнейшие исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aphale S.S., Bhikkaji B., Moheimani S.O. R. Minimizing scanning errors in piezoelectric stack-actuated nanopositioning platforms //IEEE Transactions on Nanotechnology. 2008. Т. 7. №. 1. pp. 79–90.
2. Takahashi Y., Nakaura S., Sampei M. Position control of surface vessel with unknown disturbances //2007 46th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2007. pp. 1673–1680.
3. Xia Y., Douglas S. C., Mandic D.P. Adaptive frequency estimation in smart grid applications: Exploiting noncircularity and widely linear adaptive estimators //IEEE Signal Processing Magazine. 2012. Т. 29. №. 5. pp. 44–54.
4. Phan A.T., Hermann G., Wira P. A new state-space for unbalanced three-phase systems: Application to fundamental frequency tracking with Kalman filtering //2016 18th Mediterranean Electrotechnical Conference (MELECON). IEEE, 2016. pp. 1–6.
5. Pin G. et al. Identification of multi-sinusoidal signals with direct frequency estimation: An adaptive observer approach //Automatica. 2019. Т. 99. pp. 338–345.
6. Carnevale D., Astolfi A. A minimal dimension observer for global frequency estimation //2008 American Control Conference. IEEE, 2008. pp. 5236–5241.
7. Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Vedyakov A.A., & Kolyubin S.A. Estimation of polyharmonic signal parameters //Automation and remote control. 2015. Т. 76. №. 8. pp. 1400-1416.
8. Carnevale D., Astolfi A. A hybrid observer for frequency estimation of saturated multi-frequency signals //2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. IEEE, 2011. pp. 2577–2582.
9. Aranovskiy S.V., Bobtsov A.A., Ortega R., & Pyrkin A.A. (2016). Improved transients in multiple frequencies estimation via dynamic regressor extension and mixing. IFAC-PapersOnLine, 49(13), pp. 99–104.
10. Wang J., Gritsenko P.A., Aranovskiy S. ., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A. (2017). A method for increasing the rate of parametric convergence in the problem of identification of the sinusoidal signal parameters. Automation and Remote Control, 78(3), pp. 389–396.
11. Chen B. et al. Estimation of multi-sinusoidal signals: A deadbeat methodology //2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC). IEEE, 2016. pp. 3763–3768.
12. Gromov V.S. et al. First-order frequency estimator for a pure sinusoidal signal //2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). IEEE, 2017. pp. 7–11.

A. O. Vediakova (St. Petersburg State University, St. Petersburg), A. A. Vedyakov, A. A. Pyrkin,  
A. A. Bobtsov, V. S. Gromov (ITMO University, St. Petersburg)

**Finite Time Multi-sinusoidal Signal Frequency Estimation**

The paper presents a method for finite time frequencies estimation of multi-sinusoidal signal. Delay operators are applied to the measured signal, and a linear regression model is constructed, containing the measured signals and a constant vector, depending on unknown frequencies. Dynamic Regressor Extension and Mixing method is used to synthesize independent first order regression models. Then, standard gradient descent method used to unknown parameters estimates independently of each other. On the last step, the finite-time frequency estimate is found algebraically.